

RBT 模式下刚性挡墙非极限主动土压力的 离散元模拟及理论研究

姚嘉楠¹, 徐长节^{1,2,3}, 迟民良¹, 王艳萍⁴, 习跃来⁴, 王伟锋⁴, 冯国辉¹, 孙佳政¹

(1. 浙江大学 滨海和城市岩土工程研究中心, 浙江 杭州 310058; 2. 华东交通大学 江西省地下空间技术开发工程研究中心, 江西 南昌 330013;
3. 华东交通大学 江西省岩土工程基础设施安全与控制重点实验室, 江西 南昌 330013;
4. 浙江省建投交通基础建设集团有限公司, 浙江 杭州 310012)

摘 要: 针对刚性挡墙绕基底转动与平动耦合 (rotation around the base and translation coupling, 简称 RBT) 模式下砂土非极限主动土压力的分布问题, 选取转动中心位置参数 $n=0.5$ 、 1.0 、 5.0 共 3 组转动中心对其进行离散元模拟研究。结果表明, RBT 模式下主动土压力兼具绕基底转动 (rotation around base, 简称 RB) 模式下凹型分布和平动 (translational, 简称 T) 模式直线分布的特点。在破坏过程中, 墙土摩擦角往往先于内摩擦角达到极限值, 墙后滑裂面为一曲面, 且土体滑裂面处有明显的主应力偏转现象。基于数值模拟结果, 根据中间对称圆弧拱得到了层间等效内摩擦角与 n 的函数关系式, 利用水平层分析法, 建立了曲边梯形微分单元的受力平衡方程, 采用有限差分法求解得到了 RBT 模式非极限主动土压力数值解。参数分析表明, 墙体位移、内摩擦角及转动中心位置参数 n 对主动土压力具有显著的影响。通过与数值模拟和模型试验的对比, 验证了所提理论的合理性和可靠性, 研究成果可为刚性挡土墙土压力计算提供参考。

关 键 词: RBT 模式; 非极限主动土压力; 离散元法; 土拱效应; 层间等效内摩擦角; 水平层分析法
中图分类号: TU 432 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-7598 (2025) 02-640-13

Discrete element simulation and theoretical study on non-limit active earth pressure of rigid retaining wall under RBT mode

YAO Jia-nan¹, XU Chang-jie^{1,2,3}, CHI Min-liang¹, WANG Yan-ping⁴, XI Yue-lai⁴,
WANG Wei-feng⁴, FENG Guo-hui¹, SUN Jia-zheng¹

(1. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310058, China;
2. Engineering Research & Development Centre for Underground Technology of Jiangxi Province, East China Jiaotong University, Nanchang, Jiangxi 330013, China;
3. Jiangxi Key Laboratory of Infrastructure Safety Control in Geotechnical Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang, Jiangxi 330013, China;
4. Zhejiang Infrastructure Construction Group Co., Ltd., Hangzhou, Zhejiang 310012, China)

Abstract: This study investigates the distribution of non-limit active earth pressure in sand under the rotation around the base and translation coupling (RBT) mode of rigid retaining wall. Three groups of position parameter of rotation center ($n=0.5$, 1.0 , and 5.0) are selected for discrete element simulation study. The results indicate that the active earth pressure in RBT mode exhibits both concave distribution characteristics of the rotation around base (RB) mode and linear distribution characteristics of the translational (T) mode in rigid retaining walls. During failure, the wall-soil friction angle usually reaches its limit value before the internal friction angle. The slip surface behind the wall forms a curve, with a noticeable principal stress deflection at the soil slip surface. Based on the numerical simulation results, the relationship between the equivalent internal friction angle of the interlayer and the position parameter of rotation center n is derived using the middle symmetrical arc arch. The force equilibrium equation for the curved trapezoidal differential unit is established using the horizontal layer analysis method, and the numerical solution for non-limit active earth pressure in RBT mode is obtained using the finite difference method. Parameter analysis shows that displacement, internal friction angle and n significantly affect the active earth pressure. Comparison of numerical simulations and model tests verifies the

收稿日期: 2024-04-03

录用日期: 2024-08-19

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 52238009); 国家自然科学基金-高铁联合基金 (No. U1934208); 江西省自然科学基金-揭榜挂帅资助项目 (No. 20223BBG71018)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (52238009), the National Natural Science Foundation of China-High-Speed Rail Joint Fund (U1934208) and the Natural Science Foundation of Jiangxi Province - Unveiling the Leader Funding Project (20223BBG71018).

第一作者简介: 姚嘉楠, 男, 1997 年生, 硕士研究生, 主要从事土压力理论与离散元模拟等方面的研究。E-mail: yaojn@zju.edu.cn

rationality and reliability of the theory presented in this paper. The findings provide a valuable reference for calculating earth pressure in rigid retaining walls.

Keywords: RBT mode; non-ultimate active earth pressure; discrete element method; soil arching effect; equivalent internal friction angle of interlayer; horizontal layer analysis method

1 引言

土压力是岩土工程界一个经典的研究课题,其计算的准确与否是挡土结构设计的合理性与可靠性的主要影响因素之一。目前设计人员往往采用库仑和朗肯土压力理论对挡土结构的土压力进行估算,但经典土压力理论无法充分考虑挡墙的位移模式和非极限平衡状态,以致经典土压力理论计算值与实际测量值存在较大差异。此外,国内外大多数学者对挡墙位移模式的研究大多局限于平动(translational,简称T)、绕底转动(rotation around base,简称RB)和绕顶转动(rotaton around top,简称RT)等基本位移模式,而忽略了对位移耦合效应的研究。事实上,挡土墙在实际位移过程中易受外界因素影响而多出现平动和绕墙转动共存的组合位移模式,尤其是挡土墙平动和绕墙底转动的位移模式^[1]。

Sherif等^[2]通过模型试验,定义土压力不再减小时为主动极限状态,认为主动极限状态随着墙体位移从土体表面向下传递发展,墙高内各点土体达到主动极限状态的临界水平位移几乎相同,且与土体密度无关。诸多学者^[3-7]的研究表明,土体从静止状态转变为极限状态是一个渐进的过程,土压力的大小、方向以及作用点往往取决于挡土墙的位移模式及位移大小,仅平动模式下的土压力近似呈线性分布。针对非平动模式下的土压力问题,Chang^[8]、姜玉平^[9]等分别根据线性内摩擦角假设和塑性极限分析理论,推导了RB模式和RT模式下的主动土压力计算公式。彭述权等^[10]则根据理想刚塑性体和一系列弹簧组合体土体模型,得到了任意位移模式下挡墙主动土压力的理论公式,然而该方法忽略了土拱效应^[11-12]对土压力的影响,与实际情况不符。为了更加合理地计算土压力,Paik^[13]、Goel^[14]等分别根据半圆弧拱、抛物线拱假设,推导了墙后土压力的理论计算公式。蒋波^[15]对比研究了不同形状土拱的侧土压力系数、土压力分布以及合力作用点,认为土拱形状对土压力的影响较小,可选用圆弧拱简化计算。此外,陈奕柏^[16]、陈建旭^[17]等引入层间等效内摩擦角的概念考虑不同位移模式及土拱效应对土压力的影响,但该方法缺少理论依据,同时没有考虑土体内部的应力变化情况。Dang等^[18]则在平面应变状态假设基础上提出了一种同时考虑轴向应力和墙体位移的土压力计算方法。然而,上述理论

往往采取库仑直线滑动面,认为内摩擦角和墙土摩擦角同步发挥,忽略了土拱效应引起的主应力偏转问题。

近年来,数值模拟方法得到了广泛应用。Matsuzawa等^[19]在Ichihara^[20]模型试验基础上通过有限元数值分析,得到了绕基底转动与平动耦合(rotation around the base and translation coupling,简称RBT)模式下的土压力强度经验公式。龚晓南等^[21]利用有限元法研究了刚性挡土墙3种基本位移模式、墙土摩擦特性、土体变形特性等对土压力大小和分布的影响。然而,有限元法采用连续介质假设,忽略了土颗粒介质的离散特性。因此,一些学者利用离散单元法(discrete element method,简称DEM)对刚性挡墙土压力问题进行了大量的尝试和应用^[22-25]。Jiang等^[22]将考虑颗粒间滚动阻力的接触模型引入离散元法,分析了基本位移模式下刚性挡墙的土压力问题。张恒志等^[24]则利用离散元法研究了墙后填土宽度对无黏性有限土体主动土压力的影响。然而,现有研究基本集中在3种基本位移模式,缺乏对位移耦合效应下土体破坏过程中内部大小主应力偏转及细观机制的研究。

综上所述,现有的非极限主动土压力理论研究中,针对RBT模式下非极限主动破坏内在机制和主应力偏转方面的研究尚显不足,故本文使用DEM软件模拟了刚性挡墙RBT模式下砂土的破坏过程,以便开展更深入的研究。在模拟结果基础上,考虑了墙土摩擦角和内摩擦角的调动差异,根据中间对称圆弧拱得到了层间等效内摩擦角的计算方法,采用水平层分析法推导了RBT模式下刚性挡墙的主动土压力理论计算方法,并通过与数值模拟及模型试验的对比分析验证了本文理论的合理性。

2 离散元模拟

为了克服传统连续介质模型理论的局限性,针对RBT模式下刚性挡墙的土压力问题,本文采用PFC^{2D}软件模拟了砂土的主动破坏过程。

2.1 模型参数

前人研究发现^[26-27],离散元中砂土颗粒形状对颗粒流模拟的宏观力学行为具有一定影响,在模拟中直接使用颗粒间无抗转动弯矩的圆形颗粒,忽视了砂土颗粒形状不规则的特点,将导致模拟试样的强度、剪切特性等宏观力学行为与实际情况不符。

为解决这一问题, Ting 等^[28]提出由圆形颗粒组合成复杂形状颗粒, 以此模拟砂土真实的宏观力学性质。在综合考虑各种颗粒形状对宏观力学行为的影响下, 本文选取了由 3 个圆盘组成的椭圆形刚性颗粒簇 (椭圆长轴: 短轴 = 1.5: 1) 作为基本颗粒, 来考虑抗转动弯矩的影响, 如图 1 所示, 其中, 粒径比 $r_1 : d : r_2 = 2 : 3 : 2$ 。刚性颗粒簇按体积相等原则转换成圆形颗粒的粒径为 3~5 mm。

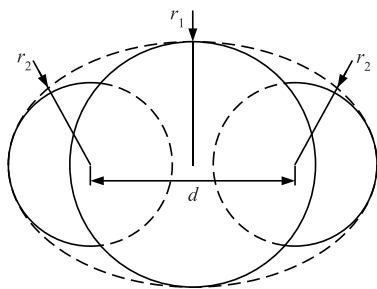


图 1 刚性颗粒簇模板

Fig.1 Rigid particle clump template

为了得到更加真实、可靠的土体物理力学参数, 有必要对线性接触模型中的 3 个基本属性: 法向接触刚度 k_n 、切向接触刚度 k_s 及颗粒摩擦系数 μ 进行合理的选取。根据申志福^[29]、Goldenberg^[30]等的研究, 砂土的法向刚度宜取 $1.5 \times 10^5 \sim 1.5 \times 10^6$ kN/m, 法向刚度与切向刚度的比值在 1.0~1.5 较为合理, 颗粒摩擦系数取 0.1~0.7。DEM 模型按体积相等原则将颗粒簇参数换算为圆形颗粒, 具体取值见表 1。

表 1 DEM 模型参数

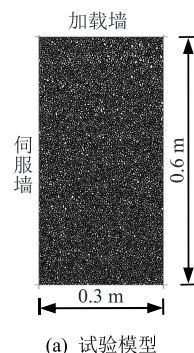
Table 1 Parameters of DEM model

粒径 / mm	颗粒密度 /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	初始 孔隙率	颗粒 摩擦 系数	墙体摩擦系数		接触刚度 /($10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$)	
				双轴 试验	土压力 试验	法向	切向
3~5	2 650	0.22	0.7	0.0	0.7	1.5	1.0

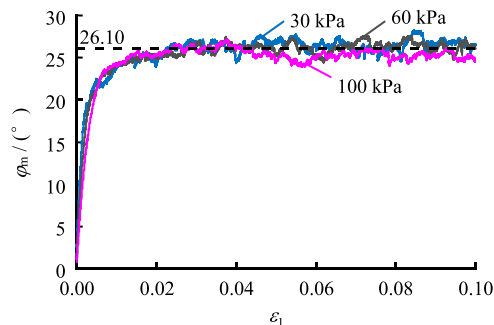
本文采用 PFC 软件开展了 3 组双轴模拟试验以获取土样的内摩擦角, 围压分别为 30、60、100 kPa。土样利用 Jiang 等^[22]提出的分层欠压实法得到, 颗粒数量总计 33 525, 土样高度为 0.6 m、宽度为 0.3 m, 设置墙体摩擦系数为 0, 如图 2(a)所示。

图 2(b)为双轴标定试验结果, 其中 φ_m 为内摩擦角发挥值, ε_1 为轴向应变, $\varphi_m = \arcsin(q/p)$, $q = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, $p = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, σ_1 、 σ_3 分别为最大、最小主应力。由图可知, 不同围压下土样的内摩擦角平均值 $\varphi = 26.10^\circ$ 。

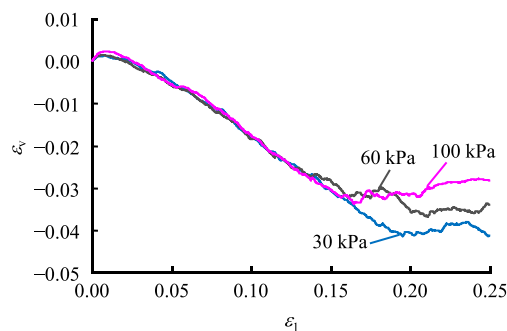
图 2(c)为双轴试验土样的体应变 ε_v 变化曲线 (压缩为正)。由图可知, 土样体应变先减小后增大, 最终趋于一稳定值, 呈现先剪缩后剪胀的特性。



(a) 试验模型



(b) 试验结果



(c) 体应变变化曲线

图 2 双轴标定试验

Fig.2 Biaxial compression tests

2.2 离散元模拟

刚性挡土墙 RBT 主动位移模式所采用的模型如图 3 所示。

砂土试样由刚性颗粒簇形成, 挡土墙由墙体组成。左侧墙体为位移墙, 由 10 段高度为 0.1 m 的测量墙组成, 由下向上编号分别为 1#~10#; 右侧墙体为固定墙, 模型下部设置 0.2 m 高的保留墙。本文模型土样分成 6 层, 利用重力沉积法逐层生成, 颗粒数量总计 439 167。为减小墙体对生成土样的影响, 在沉积过程中, 设置墙体摩擦系数为 0 并保持

墙体固定, 采用调整颗粒摩擦系数的方法控制土样孔隙率为 0.22。待土样沉积完成后, 按表 1 重新设置颗粒与墙体的摩擦系数, 并使模型继续循环达到新的平衡状态。土样孔隙率测量圆直径为 0.1 m, 布置如图 3 所示。

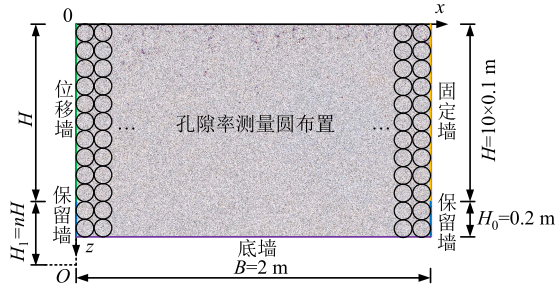


图 3 刚性挡土墙离散元模型

Fig.3 DEM model of rigid retaining wall

制样结束后, 控制左侧位移墙绕转动中心 O 向远离土体方向转动, 保持墙顶水平位移速度为 6×10^{-4} m/s。定义转动中心位置参数 n 为转动中心到位移墙墙底的距离 H_1 与位移墙高度 H 的比值。当 $n = 0$ 时, RBT 模式将转化为 RB 模式; 当 $n \rightarrow \infty$ 时, RBT 模式将转化为 T 模式。本文选取 $n = 0.5$ 、1.0、5.0 共 3 组进行离散元建模分析。

RBT 模式下挡土墙位移如图 4 所示。RBT 模式下刚性挡墙某一时刻墙顶水平位移为 S , 定义墙顶水平位移 S 与挡墙高度 H 之比为墙体位移比 S/H 。同一时刻下深度 z 处的水平位移为 S_z 。

$$S_z = S - \frac{z}{(1+n)H} S \quad (1)$$

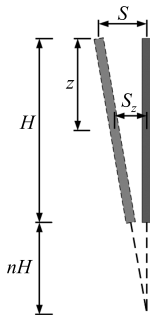


图 4 挡土墙位移示意图

Fig.4 Schematic diagram of retaining wall displacement

2.3 离散元模拟结果分析

在离散元中, 颗粒介质的离散性必然导致应力分布的非均匀性, 因此, 必须采用平均接触力的概

念将测得的接触力与连续模型联系起来。模拟过程中, 测量记录每段测量墙上的接触力, 用接触合力除以测量墙高度得到平均接触力并将其作为测量墙中点位置处的土压力强度, 10 段测量墙上的水平接触力之和即为水平土压力合力。

2.3.1 静止土压力

为验证本文模型土样初始状态的合理性, 将测量墙上的静止土压力强度值与 Jaky 经验公式对比, 如图 5 所示。由图可知, 本文模型土样的静止土压力强度和 Jaky 经验公式计算结果基本一致, 说明土样初始状态满足模拟要求。

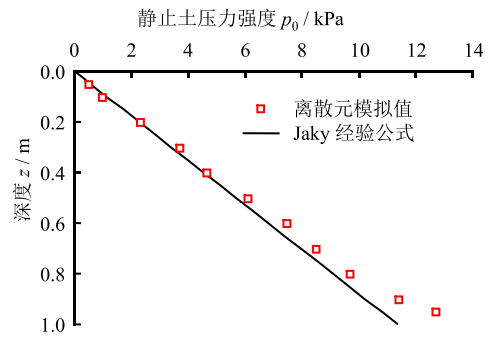


图 5 DEM 模型静止土压力模拟结果

Fig.5 Static soil pressure simulation results of DEM model

2.3.2 墙土摩擦角

为研究 RBT 位移模式下墙土摩擦角的发挥情况, 定义墙土摩擦角调动值 δ_m 为

$$\delta_m = \arctan \left(\frac{F_{vm}}{F_{hm}} \right) \quad (2)$$

式中: F_{vm} 为位移墙上竖直方向的接触合力; F_{hm} 为位移墙上水平方向的接触合力。

墙土摩擦角调动值随挡土墙的位移比 S/H 变化情况如图 6 所示。

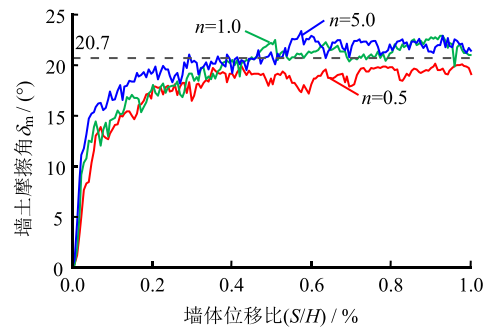


图 6 RBT 模式墙土摩擦角发挥曲线

Fig.6 Wall-soil friction angle performance curves of RBT mode

由图 6 可知, RBT 模式下不同 n 值土样的墙土摩擦角发挥情况基本一致。随着墙体位移的增加, 墙土摩擦角逐渐发挥并达到极限值。当 $n = 0.5$ 、1.0、5.0 时, 墙土摩擦角发挥极限值分别为 19.4° 、 21.3° 、 21.5° 。土样的墙土摩擦角可取平均值 20.7° 。

图 7 为各段测量墙中点位置处墙土摩擦角随墙体位移比的变化曲线。由图可知, 不同深度处挡墙的墙土摩擦角达到极限值时的临界位移并不相同, 且不同深度处墙土摩擦角发挥极限值亦有所差异。上部测量墙的墙土摩擦角发挥值总体上要大于下部, 整体表现出墙土摩擦角发挥极限值为 20.7° 左右。在 $S/H = 0.12\%$ 时, 可保证大部分区域土体达到墙土摩擦角极限值。

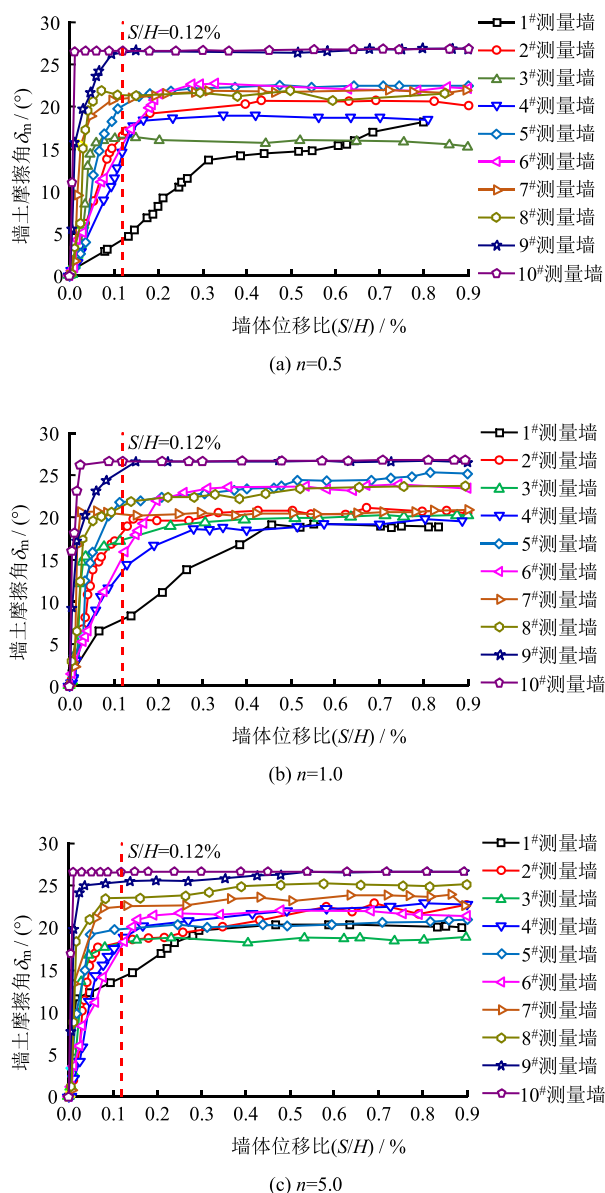


图 7 测量墙墙土摩擦角随墙体位移比的变化曲线

Fig.7 Variation of wall-soil friction angle with wall displacement ratio of measured walls

研究发现, n 的大小对中上部挡墙墙土摩擦角的发挥情况影响较小, 这可能是因为中上部墙体位移较大, 能快速达到墙土摩擦角极限值的临界位移。对于底部测量墙, 由于位移较小, 通常难以达到主动极限状态, 墙土摩擦角亦难以发挥, 如 1#测量墙。可以发现, 1#测量墙在 n 值较大时更易达到墙土摩擦角极限值。

2.3.3 主动土压力合力

图 8 为 RBT 模式主动土压力合力随位移比的变化曲线。由图可知, RBT 模式不同 n 值主动土压力合力的变化规律基本一致。随着墙体持续产生位移, 内摩擦角和墙土摩擦角逐渐发挥, 静止土压力转变为非极限土压力并逐渐过渡至极限土压力, 土压力合力不断减小并在 $S/H = 0.3\%$ 时达到稳定。由于砂土的土压力主要取决于内摩擦角和墙土摩擦角, 这说明砂土的墙土摩擦角先于内摩擦角达到极限值。

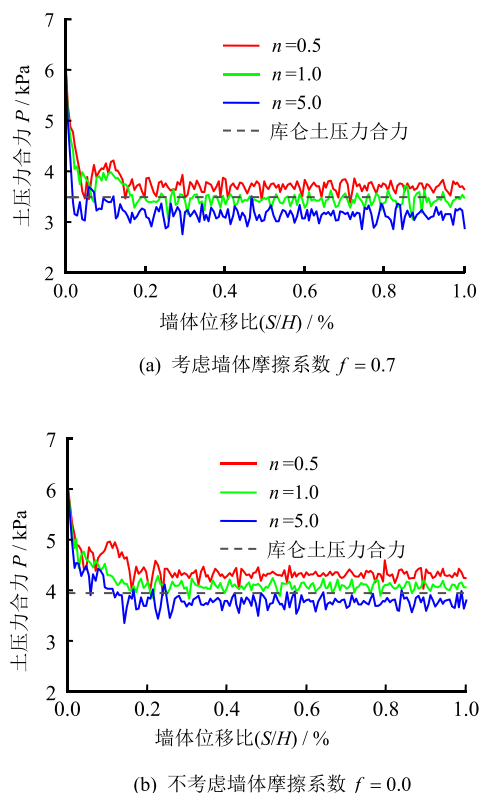


图 8 RBT 模式主动土压力合力曲线图

Fig.8 Active earth pressure resultant force curves of RBT mode

此外, 当墙体摩擦系数 $f = 0.7$ 或 n 较小时, 土压力合力存在一个小幅回增的阶段, 这可能与墙土摩擦以及墙体位移大小有关。当墙体摩擦系数为 0.0 和 0.7 时, 土压力合力达到极限值时的临界位移并未发生改变, 说明墙土摩擦对临界位移无影响。

2.3.4 主动土压力分布

图9为RBT模式主动土压力的分布情况。由图可知,RBT模式不同 n 值的非极限主动土压力分布规律基本一致,兼具RB模式和T模式的特性。对于挡墙上部的土压力,在非极限状态时表现出下凹的非线性分布特性,而在极限状态下收敛于库仑主动土压力并近似直线分布,与RB模式土压力分布相似;对于挡墙下部的土压力,随着墙体位移出现了土压力最大值上移的现象和拐点^[25],与T模式土压力分布相似,最终整体表现为上部直线的“抛物线”分布。

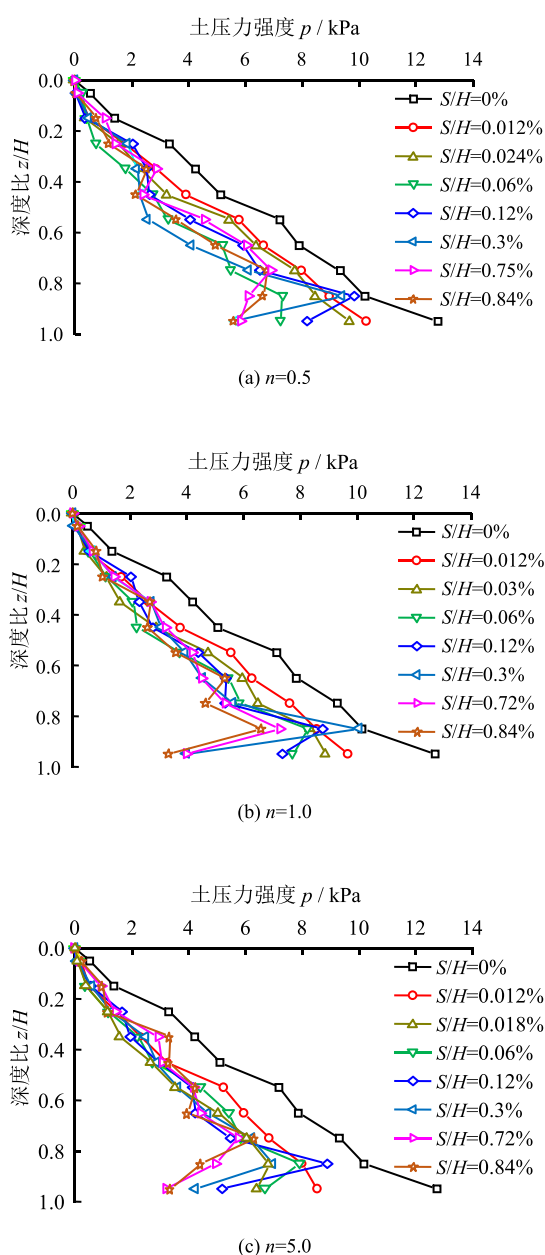


图9 RBT模式主动土压力分布图
Fig.9 Distribution of active earth pressure in RBT mode

当 $S/H < 0.12\%$ 时,随墙体位移,挡墙土压力减小,且由于上部墙体的位移大于下部墙体,上部土压力减小更快,土压力呈现下凹的非线性分布特性。当 $0.12\% < S/H < 0.3\%$ 时,墙顶处土体首先达到主动极限状态,土压力强度基本达到极限值,此时,随着墙体位移土压力减小的现象主要发生在墙体下部,这是因为 $n > 0$ 时允许下部墙体位移,下部墙体的土压力得到了释放,且 n 越大,土压力减小得越快。当 S/H 达到 0.3% 时,土压力分布曲线变化很小,可认为土体已达到主动极限状态。

2.3.5 土体破坏状态及滑裂面

土体破坏过程中,部分区域由于抗剪强度不足发生破坏,形成连通的剪切滑裂面,剪切面内的土颗粒会产生相对转动和错动,因此可通过研究颗粒的旋转程度来分析滑裂面的发展规律。图10为RBT模式非极限状态下的土体颗粒旋转云图,颜色越深表示土体破坏过程中颗粒旋转程度越大,将相同颜色深度的区域连起来即为滑裂面^[24-25]。

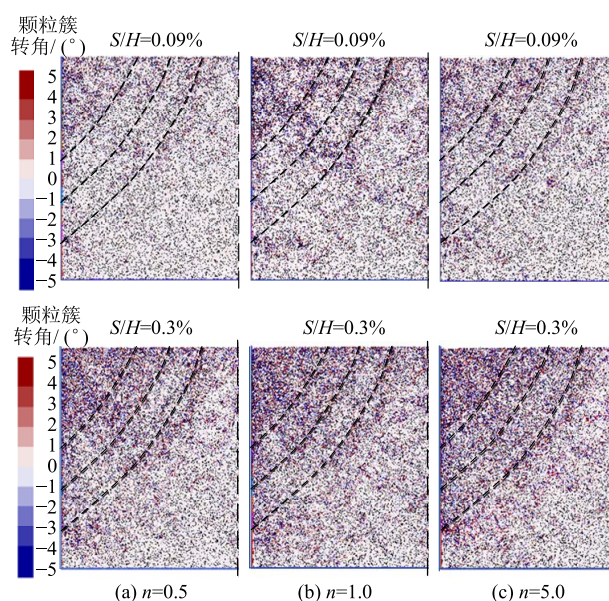


图10 RBT模式下土体内部颗粒旋转云图
Fig.10 Internal particle rotation cloud in soil under RBT mode

由图10可知,土体破坏过程中,颗粒旋转现象会随着挡墙的位移而持续发展。RBT模式下,随着墙体发生位移,土体抗剪强度逐渐发挥并达到极限值,形成一个连续曲线滑裂面,土体内部颗粒转角呈现从上往下、由外向内持续发展的态势。

2.3.6 应力状态

追踪RBT模式砂土主动破坏过程中土体内部主应力的偏转情况,如图11所示。由图可知,RBT

模式下土体滑裂面处有明显的主应力偏转现象, 上部出现大主应力轨迹线 (图中红线), 而中下部为小主应力轨迹线 (图中蓝线)。

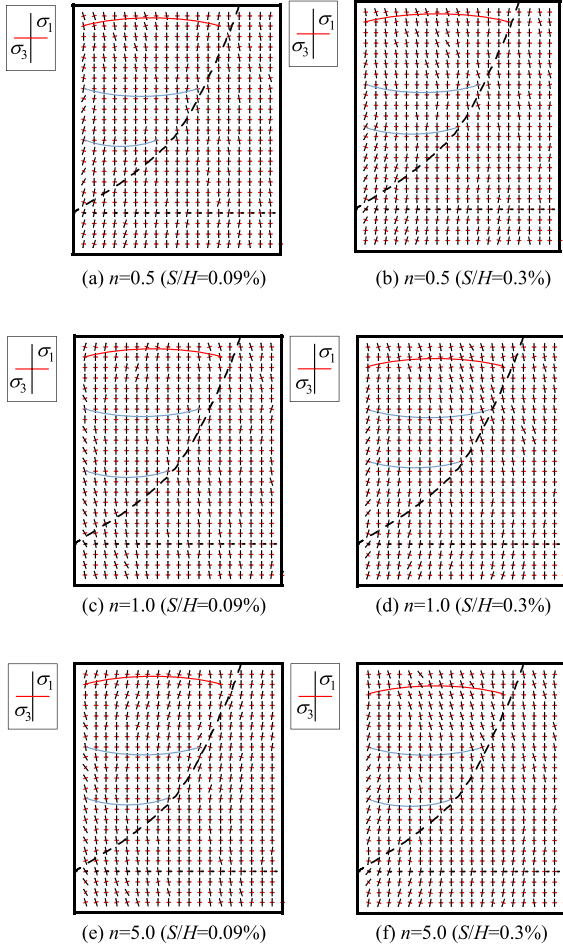


图 11 RBT 模式下土体内部主应力偏转情况

Fig 11 Internal principal stress deviation of soil mass under RBT mode

3 理论推导

本章在前文离散元模拟的基础上, 得到了层间等效内摩擦角的计算方法, 采用水平层分析法推导了刚性挡墙在 RBT 主动位移模式下的土压力计算公式。

为方便理论推导, 定义刚性挡墙某点的墙土摩擦角达最大值时的临界水平位移为 S_s , 某点土体进入主动极限状态时的临界水平位移为 S_c 。

3.1 基本假设

结合前文离散元模拟结果, 本文假设如下:

(1) 挡墙刚性, 墙背竖直, 墙后填土为均质砂土, 填土表面水平。

(2) 土压力的变化与土体内摩擦角及墙土摩擦角的发挥密切相关, 土体达到主动极限平衡状态时,

其内摩擦角均充分发挥。

(3) 滑动土楔体内为中间对称圆弧拱。

(4) 非极限主动状态下, 墙后土体中存在一个通过墙踵的潜在曲线滑动破裂面, 土压力合力达到最小值时, 土体达到主动极限状态。

(5) 墙顶水平位移 $S = S_c$ 时, 墙顶处土体首先进入主动极限状态, 定义此时的土体状态为初始极限状态。

3.2 滑动破裂面

根据离散元模拟结果, 假定 RBT 模式下墙后土体内形成一个二次抛物线曲线滑动破裂面, 墙踵处倾角 $\alpha_0 = \pi/4$, 根据 Goel 等^[14]建议, 有

$$z = a_0 B_z^2 + b_0 B_z + c \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} B_z \Big|_{z=H} &= 0 \\ \frac{dz}{dB_z} \Big|_{z=H} &= 0 \\ B_z \Big|_{z=H} &= K_{p1} H \cot \alpha_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: B_z 为深度 z 处水平微分单元宽度; a_0 、 b_0 、 c 均为抛物线参数; K_{p1} 为实际滑裂面顶部宽度与假定直线滑裂面顶部宽度的比值, 本文根据离散元模拟结果取 $K_{p1} = 0.8$ 。无资料时, 笔者建议可取 $K_{p1} = 1/\tan \beta_c$ 作近似计算, β_c 为库仑主动滑裂角。

根据边界条件式 (4), 有

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{(K_{p1} - 1) \tan^2 \alpha_0}{K_{p1}^2 H} \\ b_0 &= -\tan \alpha_0 \\ c &= H \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由此可得深度处 z 处水平微分单元宽度 B_z 为

$$B_z = \frac{-b_0 - \sqrt{b_0^2 - 4a_0(c-z)}}{2a_0} \quad (6)$$

深度处 z 处滑动破裂面倾角 β 为

$$\beta = \arctan \sqrt{b_0^2 - 4a_0(c-z)} \quad (7)$$

3.3 摩擦角与位移的关系

离散元模拟结果显示, 土体的内摩擦角和墙土摩擦角的发展不是同步的, 墙土摩擦角往往先于内摩擦角达到最大值, 这与 Fang 等^[5]试验结果表现一致。在本节中笔者考虑了这一情况。

3.3.1 内摩擦角

根据 Liu^[31]的建议, 非极限状态下挡土墙上某点的内摩擦角发挥值为

$$\varphi_m = \begin{cases} \varphi_0 + \frac{4 \arctan(S_z / S_c)}{\pi} (\varphi - \varphi_0), & S_z \leq S_c \\ \varphi, & S_z > S_c \end{cases} \quad (8)$$

式中: φ 为极限状态时的内摩擦角; φ_0 为初始内摩擦角。当 $S_z = 0$ 时, $\varphi_m = \varphi_0$; 当 $S_z = S_c$ 时, $\varphi_m = \varphi$ 。根据本文数值模拟结果, 取 $S_c = 0.3\%H$ 。

对于松散砂土或自重压实砂土, 不考虑初始墙土摩擦角 δ_0 的影响, 土体初始内摩擦角 φ_0 可按下式计算:

$$\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{\sin \varphi}{2 - \sin \varphi}\right) \quad (9)$$

对于密实砂, 应考虑土体附加静止土压力的作用, 考虑 δ_0 影响, 则 φ_0 应按下式计算:

$$\frac{1}{K_i} = \left[\frac{1}{\cos \varphi_0} + \left(\tan^2 \varphi_0 + \tan \varphi_0 \tan \delta_0 \right)^{1/2} \right]^2 \quad (10)$$

式中: K_i 为初始土压力系数。

3.3.2 墙土摩擦角

根据孙佳政等^[32]的建议, 在 Liu 经验公式基础上考虑 δ_0 的影响, 得到墙土摩擦角发挥值 δ_m 与位移 S_z 的关系式为

$$\delta_m = \begin{cases} \delta_0 + \frac{4 \arctan(S_z / S_\delta)}{\pi} (\delta - \delta_0), & S_z \leq S_\delta \\ \delta, & S_z > S_\delta \end{cases} \quad (11)$$

式中: δ 为极限状态下的墙土摩擦角。当 $S_z = 0$ 时, $\delta_m = \delta_0$; 当 $S_z = S_\delta$ 时, $\delta_m = \delta$ 。根据本文数值模拟结果, 取 $S_\delta = 0.12\%H$ 。

当 δ_0 、 δ 无实测资料时, 根据相关研究^[8, 33]可取 $\delta_0 = \varphi/3 \sim \varphi/2$, $\delta = \varphi/2 \sim 2\varphi/3$, 对于预埋式挡土墙, 宜取 $\delta_0 = 0$ 。

3.4 非极限侧土压力系数

根据离散元模拟结果, 假设非极限主动状态下, 墙后土体滑动破裂面内为中间对称圆弧拱, 圆弧土拱线的半径为 R , 土拱中心为主应力无偏转点, 如图 12 所示。

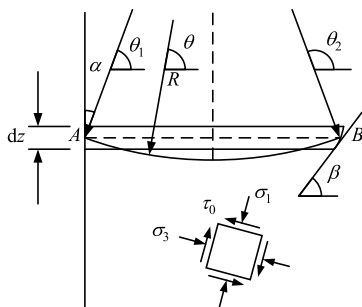


图 12 微元滑裂体受力模型

Fig.12 Mechanical model of micro sliding body

由图 13 的摩尔应力圆, 可得墙面 A 处的大主应力力偏转角 α 的函数关系式:

$$\sin(2\alpha + \delta_m) = \frac{\sin \delta_m}{\sin \varphi_m} \quad (12)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \delta_m}{\sin \varphi_m} - \frac{1}{2} \delta_m \quad (13)$$

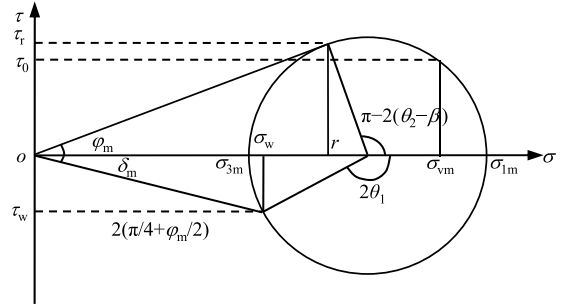


图 13 摩尔应力圆

Fig.13 Mohr stress circle

由图 12, 墙面 A 处大主应力与水平面夹角 θ_1 为

$$\theta_1 = \pi/2 - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \delta_m}{\sin \varphi_m} + \frac{\delta_m}{2} \quad (14)$$

在准滑裂面 B 处大主应力与水平面夹角 θ_2 为

$$\theta_2 = \pi - \theta_1 \quad (15)$$

由非极限微元滑裂体的摩尔应力圆, 分析可得

$$\frac{\sigma_{1m}}{\sigma_{3m}} = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \quad (16)$$

$$\sigma_{vm} = \frac{1 - \sin \varphi_m \cos 2\theta}{1 + \sin \varphi_m} \sigma_{1m} \quad (17)$$

$$\tau_0 = \frac{\sin \varphi_m \sin 2\theta}{1 + \sin \varphi_m} \sigma_{1m} \quad (18)$$

$$\sigma_w = \frac{1 + \sin \varphi_m \cos 2\theta_1}{1 + \sin \varphi_m} \sigma_{1m} \quad (19)$$

式中: σ_{1m} 、 σ_{3m} 分别为非极限水平微分单元任意点的大主应力和小主应力; σ_{vm} 、 τ_0 分别为非极限水平微分单元任意点水平面上的竖向应力和切向应力; σ_w 为非极限水平微分单元在墙面处的正应力。

非极限水平微分单元的平均竖向应力 σ_v 为

$$\sigma_v = \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sigma_{vm} R \sin \theta d\theta}{R(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)} \quad (20)$$

非极限主动侧土压力系数 $K_{wm} = \sigma_w / \sigma_v$, 有

$$K_{wm} = 3 \frac{(1 + \sin \varphi_m) \cos^2 \theta_1 + (1 - \sin \varphi_m) \sin^2 \theta_1}{3(1 + \sin \varphi_m) - 2 \sin \varphi_m \cos^2 \theta_1} \quad (21)$$

3.5 层间等效内摩擦角与转动中心位置参数的关系

土体层间剪切力由土拱效应和相邻土层错动两部分组成^[17]。对水平微分单元上下表面土拱效应产生的剪切应力积分, 可得

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_0 R \sin \theta d\theta = 0 \quad (22)$$

由此可知, 土拱效应产生的剪切合力为 0, 因此只须考虑层间错动引起的层间剪切作用。

在 RBT 模式下, 相邻水平微分单元间的错动趋势程度决定了层间等效内摩擦角 ψ_m 的大小。对于刚性挡墙, 沿墙高方向上相邻土层间的剪切位移相同, ψ_m 与墙高无关。根据参考文献[17], 得到土层间剪切系数 $\tan \psi_m$ 与转动中心位置参数 n 的非线性函数关系式为

$$\tan \psi_m = \sqrt{1/(1+n)} \tan(\xi \varphi_m) \quad (23)$$

式中: ψ_m 为非极限主动状态下土体层间等效内摩擦角; ξ 为经验系数, 由模型试验测到, RBT 模式下宜取 $\xi = 0.8 \sim 1.0$ 。当 $n \rightarrow \infty$ 时, 挡墙为平动模式, 层间等效内摩擦角为 0, 水平微分单元上下表面剪切合力为 0。当 $S=0$ 时, 本文建议可取初始层间等效内摩擦角 $\varphi_0 = 0$ 。

3.6 公式推导

RBT 位移模式非极限水平微分单元受力状态如图 14 所示。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_w &= K_{wm} \sigma_v \\ \tau_w &= \sigma_w \tan \delta_m \\ \tau_v &= \sigma_v \tan \psi_m \\ \tau_r &= r \tan \varphi_m \\ dG &= \gamma B_z \cot \beta dz \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中: τ_w 、 τ_v 分别为水平微分单元左侧边界上的切向应力和上下边界上的平均切向应力; r 、 τ_r 分别为作用在水平微分单元滑裂面上的法向应力、切向应力; dG 为水平微分单元体的重力; γ 为土体重度。

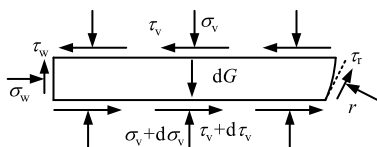


图 14 水平微分单元受力分析

Fig.14 Analysis of horizontal micro-element soil mass

水平方向平衡方程:

$$B_z \frac{d\tau_v}{dz} = r - \sigma_w + \frac{\tau_v - \tau_r}{\tan \beta} \quad (25)$$

竖直方向平衡方程:

$$B_z \frac{d\sigma_v}{dz} = \gamma B_z - (\tau_w + \tau_r) + \frac{\sigma_v - r}{\tan \beta} \quad (26)$$

联立式 (24) ~ (26) 可得

$$\frac{d\sigma_v}{dz} = a\gamma + (1 - bK_{wm}) \frac{\sigma_v}{B_z \tan \beta} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\sin(\beta - \varphi_m) \cos \psi_m}{\sin(\beta - \varphi_m + \psi_m)} \\ b &= \frac{\cos(\beta - \varphi_m - \delta_m) \cos \psi_m \tan \beta}{\sin(\beta - \varphi_m + \psi_m) \cos \delta_m} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

该式难以求解, 可根据边界条件 $\sigma_v|_{z=0} = q$, 利用有限差分法求解竖向应力 σ_v , 则 RBT 模式下刚性挡墙非极限主动土压力可按 $\sigma_w = K_{wm} \sigma_v$ 计算。

非极限水平主动土压力合力 P 为

$$P = \int_0^H \sigma_w dz \quad (29)$$

非极限主动土压力对底部的合力矩 M 为

$$M = \int_0^H \sigma_w (H - z) dz \quad (30)$$

非极限主动土压力合力作用点高度 h 为

$$h = \frac{M}{P} = \frac{\int_0^H \sigma_w (H - z) dz}{\int_0^H \sigma_w dz} \quad (31)$$

水平土压力合力系数 K 为

$$K = \frac{P}{0.5\gamma H^2} \quad (32)$$

4 对比验证

4.1 离散元模拟验证

通过与离散元模拟值的对比分析, 验证本文理论论解的合理性, 如图 15、16 所示。图 15 表明, RBT 模式非极限主动土压力分布为非线性, 本文的理论解与离散元模拟值呈现出较好的一致性, 但对墙底土压力最大值上移问题的描述尚显不足。图 16 表明, 本文方法计算得到的土压力合力及作用点位置的变化规律与模拟结果基本一致, 极限状态下的土压力合力作用点高度比最终稳定在 0.33 附近, 土压力合力系数约为 0.33, 比模拟值稍小。

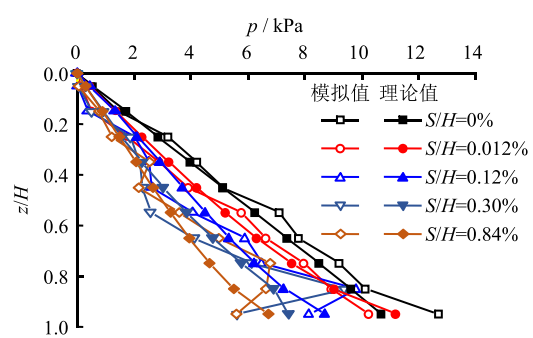


图 15 土压力强度理论与模拟结果对比 ($n=0.5$)
Fig.15 Comparison between theoretical values and simulated results of earth pressure strength ($n=0.5$)

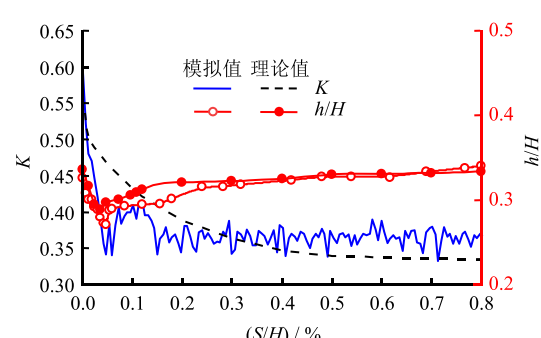


图 16 土压力作用点位置、合力系数理论与模拟结果对比 ($n=0.5$)
Fig.16 Comparison between theoretical values and simulated results of resultant earth pressure coefficient and action point position ($n=0.5$)

4.2 模型试验验证

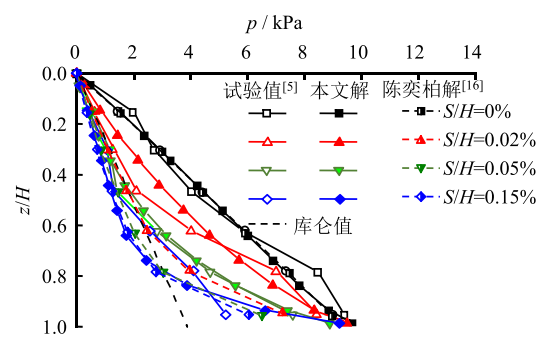
Fang 等^[5]采用风干渥太华砂土进行了模型试验，研究了刚性挡墙在不同变位模式下主动破坏的规律。图 17、18 对比了本文模型验证结果与既有文献的结果。模型试验计算参数见表 2。

图 17 表明，本文理论值与 Fang 等^[5]的试验结果拟合较好。当 $n=0$ 时，主动土压力为下凹的非线性分布；当 $n \rightarrow \infty$ 时，主动土压力近似为直线分布，且随着墙体位移增大逐渐收敛于库仑值。通过与陈奕柏等^[16]给出的解对比可知，当 $n=0$ 时，本文解的吻合性明显优于陈奕柏解；当 $n \rightarrow \infty$ 时，本文解与试验值差别不大，但稍差于陈奕柏解。图 18 表明，本文的理论合力系数 K 、合力作用位置 h 与试验结果变化趋势基本一致。随着墙体位移， K 逐渐减小并稳定在 0.25 左右，而对于合力作用位置，本文理论值稍大于试验值，极限状态时 h/H 约为 0.28。

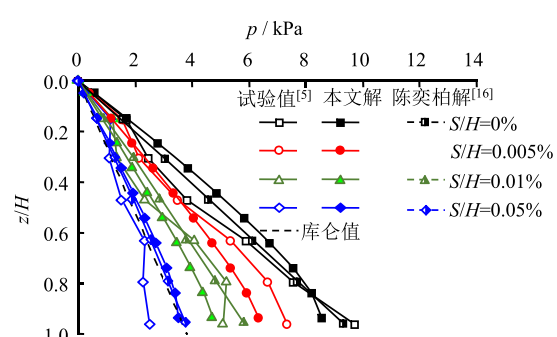
5 参数分析

本章主要分析了墙体位移比 S/H 、内摩擦角 φ

及转动中心位置参数 n 对土压力强度 p 、土压力合力作用点位置 h 及土压力合力系数 K 的影响。



(a) $n=0$



(b) $n \rightarrow \infty$

图 17 土压力强度理论与模型试验结果对比图
Fig.17 Comparison between theoretical values and model test results of earth pressure strength

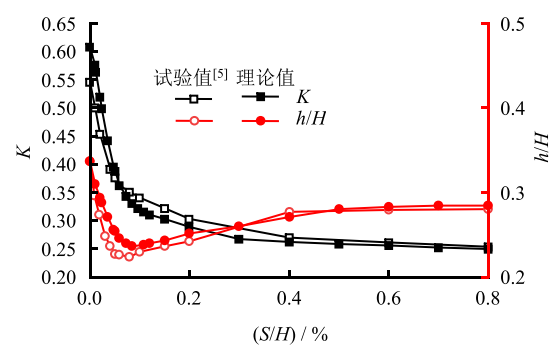


图 18 土压力合力作用点、合力系数对比图 ($n=0$)
Fig.18 Comparison of resultant force action point and resultant coefficient of earth pressure ($n=0$)

表 2 模型试验计算参数								
Table 2 Calculation parameters of model experiment								
位移模式	γ /($\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$)	φ /($^{\circ}$)	δ /($^{\circ}$)	φ_0 /($^{\circ}$)	δ_0 /($^{\circ}$)	K_{pl}	S_c/H /%	H /m
RB($n=0$)	15.34	33.4	16.7	11.13	7.2	0.61	0.050	1.015
T($n \rightarrow \infty$)	15.40	34.0	17.0	10.10	7.2	0.60	0.015	1.015

5.1 墙体位移比的影响

挡墙位移比对土压力强度分布的影响如图 19 所示。

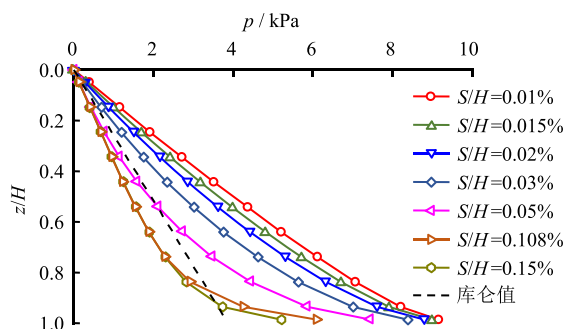


图 19 挡墙位移比对土压力强度分布的影响 ($n=0.5$)
Fig.19 Effect of S/H on earth pressure distribution ($n=0.5$)

由图 19 可知, RBT 模式下, 非极限主动土压力呈下凹的非线性分布。当 $S/H = 0.05\%$ 时, 挡墙上部土体率先达到主动土压力极限值; 随着挡墙继续位移, 土压力强度不断向库仑值靠拢, 达到主动极限状态的土体区域由上往下持续发展; 当 $S/H = 0.15\%$ 时, 土压力强度基本不再变化, 土体达到主动极限状态。由于墙脚处位移较小, 内摩擦角及墙土摩擦角难以完全调动, 土压力仅仅只能接近库仑值。

5.2 内摩擦角的影响

内摩擦角对土压力强度、合力系数的影响如图 20、21 所示。

从图 20、21 中可以看到, 挡墙位移、内摩擦角对土压力强度和合力系数具有显著影响。随着挡墙位移增大, 土压力强度逐渐减小并最终趋于一稳定值, 且内摩擦角越大, 土压力强度越小, 土压力非线性分布特性越明显。随着挡墙位移增加, 土压力合力系数将快速减小并趋于一稳定值。

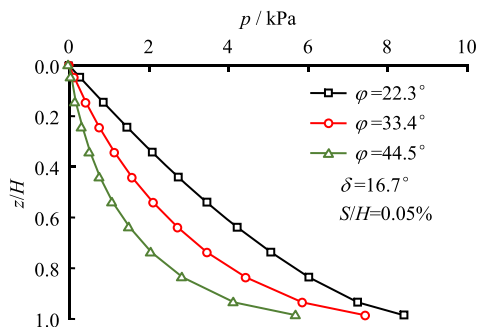


图 20 内摩擦角对土压力强度分布的影响 ($n=0.5$)
Fig.20 Effect of ϕ on active earth pressure distribution ($n=0.5$)

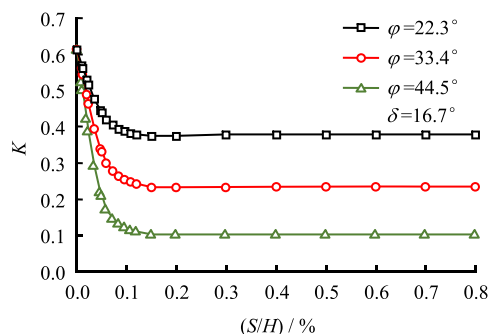


图 21 内摩擦角对土压力合力系数的影响 ($n=0.5$)
Fig.21 Effect of ϕ on resultant coefficient of active earth pressure ($n=0.5$)

5.3 转动中心位置参数的影响

转动中心位置参数对土压力强度、合力作用点位置、土压力合力系数的影响如图 22~24 所示。

由图 22 可知, 转动中心位置参数对挡墙上部的土压力影响不大, 而对挡墙下部的土压力具有显著影响。随着 n 增大, 挡墙下部的土压力持续减小并逐渐收敛于库仑值, 这是因为 n 越大, 墙脚处位移越大, 土体越接近极限状态。当 $n \geq 5.0$ 时, 可利用 T 模式进行简化计算。由图 23 可知, n 越大, 土压力合力作用点位置越高。随着 n 增大, h/H 逐渐向 T 模式理论值 0.33 靠拢。由图 24 可知, 转动中心对

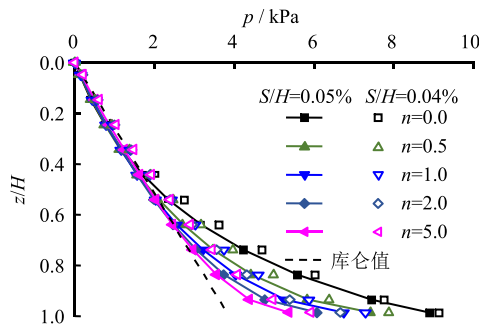


图 22 转动中心位置参数对土压力强度的影响
Fig.22 Effect of n on earth pressure strength

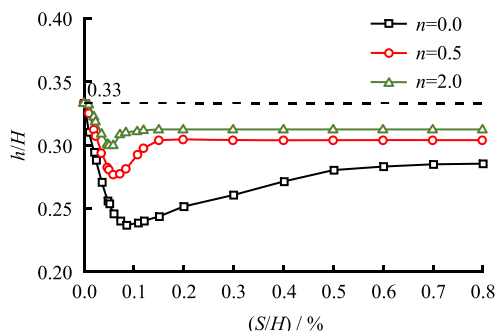


图 23 转动中心位置参数对合力作用点位置的影响
Fig.23 Effect of n on position of resultant force point

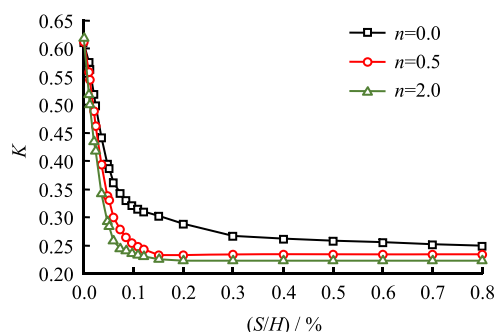


图24 转动中心位置参数对土压力合力系数的影响

Fig.24 Effect of n on resultant coefficient of soil pressure

土压力合力系数具有一定影响。随着 n 增大, 土压力合力系数会逐渐减小, 这与本文离散元模拟结果基本一致。

6 结 论

本文通过 PFC^{2D} 软件对 RBT 模式下砂土主动破坏的内在机制进行了理论研究, 由此推导了 RBT 模式下主动土压力的一般计算方法, 结论如下:

(1) 模拟结果显示, RBT 模式主动破坏过程中, 墙土摩擦角和内摩擦角存在调动差异, 土体内部准滑裂线为曲线, 且随着墙体外移, 准滑裂面上土粒转角持续增大, 最终形成一完整滑动破裂面, 土体滑动破裂面上有明显的主应力偏转现象。

(2) RBT 模式中, 挡墙中上部区域墙土摩擦角在 $S/H = 0.12\%$ 时基本可达极限值, 而在基底附近则无明显规律, 这可能是墙脚处位移有限所致。

(3) RBT 模式下的主动土压力兼具 RB 模式下凹型分布和 T 模式直线分布的特点。随着墙体位移, 挡墙上部的土压力由下凹型非线性分布逐渐向直线分布过渡, 在下部则由于最大土压力上移而出现拐点, 最终整体表现为上部直线的抛物线型分布。

(4) 基于数值模拟结果, 根据中间对称圆弧拱假设得到了层间等效内摩擦角的计算公式, 采用水平层分析法建立了水平微分单元在静力平衡条件下的微分方程, 并由有限差分法得到了 RBT 模式下主动土压力的数值解。

(5) 参数分析结果表明, 墙体位移比 S/H 、内摩擦角 φ 及转动中心位置参数 n 与主动土压力强度 p 密切相关。同一深度处的土压力会随着 S/H 和 φ 的增加而减小, 土压力合力系数 K 会随着 φ 的增大而减小。随着 n 减小, 土压力合力作用点位置 h 会降低, 土压力合力系数 K 会增大, 土压力分布的非线性特性会更加明显。

(6) 通过与数值模拟和模型试验的对比分析, 验证了本文理论的准确性和合理性。

参 考 文 献

- [1] 张宏博, 崔兵兵, 陈奇, 等. 砂土潮湿状态下悬臂式挡土墙 RBT 模型试验[J]. 建筑科学与工程学报, 2018, 35(1): 33-39.
ZHANG Hong-bo, CUI Bing-bing, CHEN Qi, et al. Experiment on RBT model test of cantilever retaining wall based on sand wet state[J]. *Journal of Architecture and Civil Engineering*, 2018, 35(1): 33-39.
- [2] SHERIF M A, FANG Y S, SHERIF R I. K_a and K_o behind rotating and non-yielding walls[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1984, 110(1): 41-56.
- [3] BANG S C. Active earth pressure behind retaining walls[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1985, 111(3): 407-412.
- [4] ROSCOE K H. The influence of strain in soil mechanics[J]. *Geotechnique*, 1970, 20(2): 129-170.
- [5] FANG Y S, ISHIBASHI I. Static earth pressures with various wall movements[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1986, 112(3): 317-333.
- [6] DOU G T, XIA J W, YU W J, et al. Non-limit passive soil pressure on rigid retaining walls[J]. *International Journal of Mining Science and Technology*, 2017, 27(3): 581-587.
- [7] HU W, ZHU X, HU T, et al. Non-limit passive earth pressure against cantilever flexible retaining wall in foundation pit considering the displacement[J]. *Plos One*, 2022, 17(3): e0264690.
- [8] CHANG M F. Lateral earth pressures behind rotating walls[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1997, 34(4): 498-509.
- [9] 姜玉平, 徐杨. RT 模式下的挡土墙主动土压力研究[J]. 勘察科学技术, 2014(增刊 1): 27-29.
JIANG Yu-ping, XU Yang. Study of active earth pressure in retaining wall under RT mode[J]. *Site Investigation Science and Technology*, 2014(Suppl.1): 27-29.
- [10] 彭述权, 刘爱华, 樊玲. 不同位移模式刚性挡墙主动土压力研究[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(1): 32-35.
PENG Shu-quan, LIU Ai-hua, FAN Ling. Active earth pressure for rigid retaining walls with different displacement modes[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, 31(1): 32-35.
- [11] KHOSRAVI M H, PIPATPONGSA T, TAKEMURA J. Experimental analysis of earth pressure against rigid retaining walls under translation mode[J]. *Geotechnique*, 2013, 63(12): 1020-1028.
- [12] RUI R, YE Y, HAN J, et al. Experimental and theoretical investigations on active earth pressure distributions behind rigid retaining walls with narrow backfill under a

- translational mode[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2020, 20(10): 4020178.
- [13] PAIK K H, SALGADO R. Estimation of active earth pressure against rigid retaining walls considering arching effects[J]. **Geotechnique**, 2003, 53(7): 643-653.
- [14] GOEL S, PATRA N R. Effect of arching on active earth pressure for rigid retaining walls considering translation mode[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2008, 8(2): 123-133.
- [15] 蒋波. 挡土结构土拱效应及土压力理论研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2005.
- JIANG Bo. Studies on soil arching effect and earth pressure for retaining structure[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2005.
- [16] 陈奕柏, 柯才桐, 高洪波, 等. 考虑变位影响的刚性挡墙非极限土压力研究[J]. **岩石力学与工程学报**, 2015, 34(5): 1060-1070.
- CHEN Yi-bai, KE Cai-tong, GAO Hong-bo, et al. Non-limit state earth pressure against retaining wall considering influence of deformation[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2015, 34(5): 1060-1070.
- [17] 陈建旭, 钱波, 郭宁, 等. 组合位移模式下刚性挡土墙非极限主动土压力[J]. **公路**, 2021, 66(6): 25-31.
- CHEN Jian-xu, QIAN Bo, GUO Ning, et al. Non-limit active earth pressure for rigid retaining wall with cobined displacement modes[J]. **Highway**, 2021, 66(6): 25-31.
- [18] DANG F N, WANG X S, CAO X, et al. Calculation method of earth pressure considering wall displacement and axial stress variations[J]. **Applied Sciences**, 2023, 13(16): 9352.
- [19] MATSUZAWA H, HAZARIKA H. Analyses of active earth pressure against rigid retaining wall subjected to different modes of movement[J]. **Soils and Foundations**, 1996, 36(3): 51-65.
- [20] ICHIHARA M, MATSUZAWA H. Application of plane strain test to earth pressure[C]//Proceedings of the 8th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. [S. l.]: ISSMGE, 1973: 185-190.
- [21] 龚晓南, 陈页开, 汪益敏, 等. 刚性挡土墙主动土压力数值分析[J]. **岩石力学与工程学报**, 2004, 23(6): 989-995.
- GONG Xiao-nan, CHEN Ye-kai, WANG Yi-min, et al. Numerical analyses of active earth pressure on rigid retaining wall[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(6): 989-995.
- [22] JIANG M, HE J, WANG J, et al. Distinct simulation of earth pressure against a rigid retaining wall considering inter-particle rolling resistance in sandy backfill[J]. **Granular Matter**, 2014, 16(5): 797-814.
- [23] LI M, CHEN J, WANG J. Arching effect on lateral pressure of confined granular material: numerical and theoretical analysis[J]. **Granular Matter**, 2017, 19(2): 20.
- [24] 张恒志, 徐长节, 何寨兵, 等. 基于离散元方法的不同挡墙变位模式下有限土体主动土压力研究[J]. **岩土力学**, 2022, 43(1): 257-267.
- ZHANG Heng-zhi, XU Chang-jie, HE Zhai-bing, et al. Study of active earth pressure of finite soils under different retaining wall movement modes based on discrete element method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2022, 43(1): 257-267.
- [25] 孙佳政. 不同位移模式下挡土墙 非极限主动土压力研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2023.
- SUN Jia-zheng. Study on non-limit active earth pressure of retaining wall under different movement modes[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2023.
- [26] JIANG M J, KONRAD J M, LEROUEIL S. An efficient technique for generating homogeneous specimens for DEM studies[J]. **Computers and Geotechnics**, 2003, 30(7): 579-597.
- [27] MOHAMED A, GUTIERREZ M. Comprehensive study of the effects of rolling resistance on the stress-strain and strain localization behavior of granular materials[J]. **Granular Matter**, 2010, 12(5): 527-541.
- [28] TING J M, MEACHUM L, ROWELL J D. Effect of particle-shape on the strength and deformation mechanisms of ellipse-shaped granular assemblages[J]. **Engineering Computations**, 1995, 12(2): 99-108.
- [29] 申志福, 蒋明镜, 朱方园, 等. 离散元微观参数对砂土宏观参数的影响[J]. **西北地震学报**, 2011, 33(增刊 1): 160-165.
- SHEN Zhi-fu, JIANG Ming-jing, ZHU Fang-yuan, et al. Influence of the micro parameters of discrete element on the macro parameters of sands[J]. **Northwestern Seismological Journal**, 2011, 33(Suppl.1): 160-165.
- [30] GOLDENBERG C, GOLDBIRSH I. Friction enhances elasticity in granular solids[J]. **Nature**, 2005, 435: 188-191.
- [31] LIU F Q. Lateral earth pressures acting on circular retaining walls[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2014, 14(3): 4014002.
- [32] 孙佳政, 傅翼, 仇雅诗, 等. RB 模式下砂土非极限主动土压力的离散元模拟与理论研究[J]. **岩土力学**, 2023, 44(2): 603-614.
- SUN Jia-zheng, FU Yi, QIU Ya-shi, et al. Discrete element simulation and theoretical study on non-limit active earth pressure of sand under RB mode[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2023, 44(2): 603-614.
- [33] 胡俊强, 张永兴, 陈林, 等. 非极限状态挡土墙主动土压力研究[J]. **岩土工程学报**, 2013, 35(2): 381-387.
- HU Jun-qiang, ZHANG Yong-xing, CHEN Lin, et al. Active earth pressure on retaining wall under non-limit state[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2013, 35(2): 381-387.